广义滤

陈至诚

北大哲学系, 2019.2.26

常见的滤：集合上的滤

已知集合 W，$X \in \wp\wp(W)$，若 X 满足：

- $W \in X$

常见的滤：集合上的滤

已知集合 W，$X \in \wp\wp(W)$，若 X 满足：

- $W \in X$
- 若 $A, B \in X$，则 $A \cap B \in X$

常见的滤：集合上的滤

已知集合 W，$X \in \wp\wp(W)$，若 X 满足：

- $W \in X$
- 若 $A, B \in X$，则 $A \cap B \in X$
- 若 $A \in X$ 且 $A \subseteq B$，则 $B \in X$

常见的滤：集合上的滤

已知集合 W，$X \in \wp\wp(W)$，若 X 满足：

- $W \in X$
- 若 $A, B \in X$，则 $A \cap B \in X$
- 若 $A \in X$ 且 $A \subseteq B$，则 $B \in X$

则称 X 为 W 上的滤。

常见的滤：集合上的滤

已知集合 W，$X \in \wp\wp(W)$，若 X 满足：

- $W \in X$
- 若 $A, B \in X$，则 $A \cap B \in X$
- 若 $A \in X$ 且 $A \subseteq B$，则 $B \in X$

则称 X 为 W 上的滤。

不难证明，任给 $X_0 \in \wp\wp(W)$，记 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp\wp(W) | X_0 \subseteq X$ 且 X 是滤 $\}$，则：

常见的滤：集合上的滤

已知集合 W，$X \in \wp\wp(W)$，若 X 满足：

- $W \in X$
- 若 $A, B \in X$，则 $A \cap B \in X$
- 若 $A \in X$ 且 $A \subseteq B$，则 $B \in X$

则称 X 为 W 上的滤。

不难证明，任给 $X_0 \in \wp\wp(W)$，记 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp\wp(W) | X_0 \subseteq X$ 且 X 是滤 $\}$，则：

- $X_0 \subseteq \Omega$ 且 Ω 是滤。

常见的滤：集合上的滤

已知集合 W，$X \in \wp\wp(W)$，若 X 满足：

- $W \in X$
- 若 $A, B \in X$，则 $A \cap B \in X$
- 若 $A \in X$ 且 $A \subseteq B$，则 $B \in X$

则称 X 为 W 上的滤。

不难证明，任给 $X_0 \in \wp\wp(W)$，记 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp\wp(W) | X_0 \subseteq X$ 且 X 是滤 $\}$，则：

- $X_0 \subseteq \Omega$ 且 Ω 是滤。（称 Ω 为由 X_0 生成的滤。）
- $\Omega = \{A \in \wp(W)|$ 存在 $A_1, ..., A_n \in X_0$，$A_1 \cap ... \cap A_n \subseteq A\}$。

常见的滤：格的滤

已知 $(A,+,\cdot)$ 是格，$X\in\wp(A)$，若 X 满足：

- 若 $a,b\in X$，则 $a\cdot b\in X$

常见的滤：格的滤

已知 $(A, +, \cdot)$ 是格，$X \in \wp(A)$，若 X 满足：

- 若 $a, b \in X$，则 $a \cdot b \in X$
- 若 $a \in X$ 且 $a \leq b$，则 $b \in X$

常见的滤：格的滤

已知 $(A,+,\cdot)$ 是格，$X\in\wp(A)$，若 X 满足：

- 若 $a,b\in X$，则 $a\cdot b\in X$
- 若 $a\in X$ 且 $a\leq b$，则 $b\in X$

则称 X 为格 A 的滤。

常见的滤：格的滤

已知 $(A,+,\cdot)$ 是格，$X\in\wp(A)$，若 X 满足：

- 若 $a,b\in X$，则 $a\cdot b\in X$
- 若 $a\in X$ 且 $a\leq b$，则 $b\in X$

则称 X 为格 A 的滤。

类似可证，任给 $X_0\in\wp(A)$，记 $\Omega=\bigcap\{X\in\wp(A)|X_0\subseteq X$ 且 X 是滤 $\}$，则：

常见的滤：格的滤

已知 $(A, +, \cdot)$ 是格，$X \in \wp(A)$，若 X 满足：

- 若 $a, b \in X$，则 $a \cdot b \in X$
- 若 $a \in X$ 且 $a \leq b$，则 $b \in X$

则称 X 为格 A 的滤。

类似可证，任给 $X_0 \in \wp(A)$，记 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | X_0 \subseteq X$ 且 X 是滤 $\}$，则：

- $X_0 \subseteq \Omega$ 且 Ω 是滤。（称为由 X_0 生成的滤。）
- $\Omega = \{a \in A|$ 存在 $a_1, \ldots, a_n \in X_0$，$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \leq a\}$。

常见的滤：格的滤

已知 $(A,+,\cdot)$ 是格，$X \in \wp(A)$，若 X 满足：

- 若 $a, b \in X$，则 $a \cdot b \in X$
- 若 $a \in X$ 且 $a \leq b$，则 $b \in X$

则称 X 为格 A 的滤。

类似可证，任给 $X_0 \in \wp(A)$，记 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | X_0 \subseteq X$ 且 X 是滤 $\}$，则：

- $X_0 \subseteq \Omega$ 且 Ω 是滤。（称为由 X_0 生成的滤。）
- $\Omega = \{a \in A|$ 存在 $a_1, \ldots, a_n \in X_0$，$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \leq a\}$。

姑且称这两条性质为“滤的典型性质”

常见的滤：格的滤

已知 $(A,+,\cdot)$ 是格，$X\in\wp(A)$，若 X 满足：

- 若 $a,b\in X$，则 $a\cdot b\in X$
- 若 $a\in X$ 且 $a\leq b$，则 $b\in X$
- $X\neq\varnothing$

则称 X 为格 A 的滤。

类似可证，任给 $X_0\in\wp(A)$，记 $\Omega=\bigcap\{X\in\wp(A)|X_0\subseteq X$ 且 X 是滤 $\}$，则：

- $X_0\subseteq\Omega$ 且 Ω 是滤。（称为由 X_0 生成的滤。）
- $\Omega=\{a\in A|$ 存在 $a_1,\ldots,a_n\in X_0$，$a_1\cdot\ldots\cdot a_n\leq a\}$。

常见的滤：格的滤

已知 $(A,+,\cdot)$ 是格，$X \in \wp(A)$，若 X 满足：

- 若 $a, b \in X$，则 $a \cdot b \in X$
- 若 $a \in X$ 且 $a \le b$，则 $b \in X$
- $X \ne \varnothing$

则称 X 为格 A 的滤。

类似可证，任给 $X_0 \in \wp(A)$，记 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | X_0 \subseteq X$ 且 X 是滤 $\}$，则：

- $X_0 \subseteq \Omega$ 且 Ω 是滤。（称为由 X_0 生成的滤。）
- $\Omega = \{a \in A|$ 存在 $a_1, ..., a_n \in X_0$，$a_1 \cdot ... \cdot a_n \le a\}$。

增加条件 $X \ne \varnothing$ ？

常见的滤：格的滤

已知 $(A,+,\cdot)$ 是格，$X\in\wp(A)$，若 X 满足：

- 若 $a,b\in X$，则 $a\cdot b\in X$
- 若 $a\in X$ 且 $a\leq b$，则 $b\in X$
- $X\neq\varnothing$

则称 X 为格 A 的滤。

类似可证，任给 $X_0\in\wp(A)$，记 $\Omega=\bigcap\{X\in\wp(A)|X_0\subseteq X$ 且 X 是滤 $\}$，则：

- $X_0\subseteq\Omega$ 且 Ω 是滤。（称为由 X_0 生成的滤。）
- $\Omega=\{a\in A|$ 存在 $a_1,\ldots,a_n\in X_0$，$a_1\cdot\ldots\cdot a_n\leq a\}$。

增加条件 $X\neq\varnothing$ ？
是否仍有典型性质？

常见的滤：格的滤

已知 $(A,+,\cdot)$ 是格，$X\in\wp(A)$，若 X 满足：

- 若 $a,b\in X$，则 $a\cdot b\in X$
- 若 $a\in X$ 且 $a\leq b$，则 $b\in X$
- $X\neq\varnothing$

则称 X 为格 A 的滤。

类似可证，任给 $X_0\in\wp(A)$，记 $\Omega=\bigcap\{X\in\wp(A)|X_0\subseteq X$ 且 X 是滤 $\}$，则：

- $X_0\subseteq\Omega$ 且 Ω 是滤。（称为由 X_0 生成的滤。）
- $\Omega=\{a\in A|$ 存在 $a_1,\ldots,a_n\in X_0$，$a_1\cdot\ldots\cdot a_n\leq a\}$。

增加条件 $X\neq\varnothing$ ？
是否仍有典型性质？？

常见的滤：格的滤

已知 $(A, +, \cdot)$ 是格，$X \in \wp(A)$，若 X 满足：

- 若 $a, b \in X$，则 $a \cdot b \in X$
- 若 $a \in X$ 且 $a \leq b$，则 $b \in X$
- $X \neq \varnothing$

则称 X 为格 A 的滤。

类似可证，任给 $X_0 \in \wp(A)$，记 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | X_0 \subseteq X$ 且 X 是滤 $\}$，则：

- $X_0 \subseteq \Omega$ 且 Ω 是滤。（称为由 X_0 生成的滤。）
- $\Omega = \{a \in A|$ 存在 $a_1, \ldots, a_n \in X_0$，$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \leq a\}$。

增加条件 $X \neq \varnothing$ ？
是否仍有典型性质？？是否有必要？

常见的滤：格的滤

已知 $(A, +, \cdot)$ 是格，$X \in \wp(A)$，若 X 满足：

- 若 $a, b \in X$，则 $a \cdot b \in X$
- 若 $a \in X$ 且 $a \leq b$，则 $b \in X$
- $X \neq \varnothing$

则称 X 为格 A 的滤。

类似可证，任给 $X_0 \in \wp(A)$，记 $\Omega = \bigcap\{X \in \wp(A) | X_0 \subseteq X$ 且 X 是滤 $\}$，则：

- $X_0 \subseteq \Omega$ 且 Ω 是滤。（称为由 X_0 生成的滤。）
- $\Omega = \{a \in A|$ 存在 $a_1, ..., a_n \in X_0$，$a_1 \cdot ... \cdot a_n \leq a\}$。

增加条件 $X \neq \varnothing$ ？

是否仍有典型性质？？ 是否有必要？没有

典型性质一

命题逻辑（以 $\to, \neg$ 为初始逻辑符号）中，公式的定义：

- 命题变量是公式

典型性质一

命题逻辑（以 $\to, \neg$ 为初始逻辑符号）中，公式的定义：

- 命题变量是公式
- 若 ϕ 是公式，则 $\neg\phi$ 是公式
- 若 ϕ 是公式且 ψ 是公式，则 $(\phi \to \psi)$ 是公式

典型性质一

命题逻辑（以 $\rightarrow, \neg$ 为初始逻辑符号）中，公式的定义：

- 命题变量是公式
- 若 ϕ 是公式，则 $\neg\phi$ 是公式
- 若 ϕ 是公式且 ψ 是公式，则 $(\phi \rightarrow \psi)$ 是公式
- “别无其他”（《数理逻辑：证明及其限度》）

典型性质一

命题逻辑（以 $\rightarrow, \neg$ 为初始逻辑符号）中，公式的定义：

- 命题变量是公式
- 若 ϕ 是公式，则 $\neg\phi$ 是公式
- 若 ϕ 是公式且 ψ 是公式，则 $(\phi \rightarrow \psi)$ 是公式
- “别无其他”（《数理逻辑：证明及其限度》）
  “只有这些是公式”（《符号逻辑讲义》）

典型性质一

命题逻辑（以 $\to, \neg$ 为初始逻辑符号）中，公式的定义：

- 命题变量是公式
- 若 ϕ 是公式，则 $\neg\phi$ 是公式
- 若 ϕ 是公式且 ψ 是公式，则 $(\phi \to \psi)$ 是公式
- “别无其他”（《数理逻辑：证明及其限度》）
  “只有这些是公式”（《符号逻辑讲义》）

如何理解上面的定义？

典型性质一

命题逻辑（以 $\rightarrow, \neg$ 为初始逻辑符号）中，公式的定义：

- 命题变量是公式
- 若 ϕ 是公式，则 $\neg\phi$ 是公式
- 若 ϕ 是公式且 ψ 是公式，则 $(\phi \rightarrow \psi)$ 是公式
- “别无其他”（《数理逻辑：证明及其限度》）
  “只有这些是公式”（《符号逻辑讲义》）

如何理解上面的定义？
一种理解：称满足 2、3 条的集合是对 $\neg$、$\rightarrow$ 封闭的，而公式集是最小的包含命题变量集且对 $\neg$ 、$\rightarrow$ 封闭的集合。

典型性质一

命题逻辑（以 $\to, \neg$ 为初始逻辑符号）中，公式的定义：

- 命题变量是公式
- 若 ϕ 是公式，则 $\neg\phi$ 是公式
- 若 ϕ 是公式且 ψ 是公式，则 $(\phi \to \psi)$ 是公式
- “别无其他”（《数理逻辑：证明及其限度》）
  “只有这些是公式”（《符号逻辑讲义》）

如何理解上面的定义？
一种理解：称满足 2、3 条的集合是对 $\neg$、$\to$ 封闭的，而公式集是最小的包含命题变量集且对 $\neg$、$\to$ 封闭的集合。（最小元的存在性？）

典型性质一

命题逻辑（以 $\rightarrow, \neg$ 为初始逻辑符号）中，公式的定义：

- 命题变量是公式
- 若 ϕ 是公式，则 $\neg\phi$ 是公式
- 若 ϕ 是公式且 ψ 是公式，则 $(\phi \rightarrow \psi)$ 是公式
- “别无其他”（《数理逻辑：证明及其限度》）
  “只有这些是公式”（《符号逻辑讲义》）

如何理解上面的定义？
一种理解：称满足 2、3 条的集合是对 $\neg$、$\rightarrow$ 封闭的，而公式集是最小的包含命题变量集且对 $\neg$ 、$\rightarrow$ 封闭的集合。（最小元的存在性？）
更精确的定义：$Form = \bigcap\{X \in \wp($ 符号串集 $)|$ 命题变量集 $\subseteq X$ 且 X 对 $\neg$ 、$\rightarrow$ 封闭 $\}$

典型性质一

命题逻辑（以 $\to, \neg$ 为初始逻辑符号）中，公式的定义：

- 命题变量是公式
- 若 ϕ 是公式，则 $\neg\phi$ 是公式
- 若 ϕ 是公式且 ψ 是公式，则 $(\phi \to \psi)$ 是公式
- “别无其他”（《数理逻辑：证明及其限度》）
  “只有这些是公式”（《符号逻辑讲义》）

如何理解上面的定义？
一种理解：称满足 2、3 条的集合是对 $\neg$、$\to$ 封闭的，而公式集是最小的包含命题变量集且对 $\neg$ 、$\to$ 封闭的集合。（最小元的存在性？）
更精确的定义：$Form = \bigcap\{X \in \wp($ 符号串集 $)|$ 命题变量集 $\subseteq X$ 且 X 对 $\neg$ 、$\to$ 封闭 $\}$(满足上面的定义吗？)

典型性质一

2、3 是封闭性条件，而公式集是最小的包含命题变量集且对 $\neg$、$\to$ 封闭的集合。（最小元的存在性？）

更精确的定义，$Form = \bigcap\{X \in \wp($ 符号串集 $)|$ 命题变量集 $\subseteq X$ 且 X 对 $\neg$、$\to$ 封闭 $\}$ (满足上面的定义吗？)

典型性质一

2、3 是封闭性条件，而公式集是最小的包含命题变量集且对 $\neg$、$\rightarrow$ 封闭的集合。（最小元的存在性？）

更精确的定义，$Form = \bigcap\{X \in \wp($ 符号串集 $)|$ 命题变量集 $\subseteq X$ 且 X 对 $\neg$、$\rightarrow$ 封闭 $\}$ (满足上面的定义吗？)

定理

给定论域 A，Q 是 $\wp(A)$ 上的一元谓词，则

$$\Gamma = \{X \in \wp(A) | Q(X)\} \text{具有最小元} \iff Q(\Omega)$$

其中，$\Omega = \bigcap \Gamma$。

典型性质一

2、3 是封闭性条件，而公式集是最小的包含命题变量集且对 $\neg$、$\rightarrow$ 封闭的集合。（最小元的存在性？）
更精确的定义，$Form = \bigcap\{X \in \wp($ 符号串集 $)|$ 命题变量集 $\subseteq X$ 且 X 对 $\neg$、$\rightarrow$ 封闭 $\}$ (满足上面的定义吗？)

定理

给定论域 A，Q 是 $\wp(A)$ 上的一元谓词，则

$$\Gamma = \{X \in \wp(A)|Q(X)\}\text{具有最小元} \iff Q(\Omega)$$

其中，$\Omega = \bigcap\Gamma$。

取 A 为符号串集，$Q(X)$ 为"命题变量集 $\subseteq X$ 且 X 对 $\neg$、$\rightarrow$ 封闭"，则两个问题都归结为：
证明 $Q(\Omega)$。（其中 $\Omega = \bigcap\Gamma = \bigcap\{X \in \wp(A)|Q(X)\}$。）

典型性质一

取论域 $A =$ 符号串集，Q(X) 为“命题变量集 $\subseteq X$ 且 X 对 $\neg$ 、$\rightarrow$ 封闭”，$\Omega = \bigcap \Gamma = \bigcap \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$，求证：$Q(\Omega)$。

典型性质一

取论域 $A=$ 符号串集，Q(X) 为“命题变量集 $\subseteq X$ 且 X 对 $\neg$、$\rightarrow$ 封闭”，$\Omega=\bigcap\Gamma=\bigcap\{X\in\wp(A)|Q(X)\}$，求证：$Q(\Omega)$。

回忆通常的滤的典型性质：（以格的滤为例）
$(A,+,\cdot)$ 是格，$X_0\in\wp(A)$，$\Omega=\bigcap\{X\in\wp(A)|X_0\subseteq X$ 且 X 是滤 $\}$，则：

- $X_0\subseteq\Omega$ 且 Ω 是滤。

典型性质一

取论域 $A=$ 符号串集，Q(X) 为“命题变量集 $\subseteq X$ 且 X 对 $\neg$ 、$\rightarrow$ 封闭”，$\Omega=\bigcap\Gamma=\bigcap\{X\in\wp(A)|Q(X)\}$，求证：$Q(\Omega)$。

回忆通常的滤的典型性质：（以格的滤为例）
$(A,+,\cdot)$ 是格，$X_0\in\wp(A)$，$\Omega=\bigcap\{X\in\wp(A)|X_0\subseteq X$ 且 X 是滤 $\}$，则：

- $X_0\subseteq\Omega$ 且 Ω 是滤。

（论域 A，Q(X) 为“$X_0\subseteq X$ 且 X 是滤”，则：$Q(\Omega)$。）
（相似性）

典型性质一

取论域 $A=$ 符号串集，Q(X) 为“命题变量集 $\subseteq X$ 且 X 对 $\neg$、$\rightarrow$ 封闭”，$\Omega=\bigcap\Gamma=\bigcap\{X\in\wp(A)|Q(X)\}$，求证：$Q(\Omega)$。

回忆通常的滤的典型性质：（以格的滤为例）
$(A,+,\cdot)$ 是格，$X_0\in\wp(A)$，$\Omega=\bigcap\{X\in\wp(A)|X_0\subseteq X$ 且 X 是滤 $\}$，则：

- $X_0\subseteq\Omega$ 且 Ω 是滤。

（论域 A，Q(X) 为“$X_0\subseteq X$ 且 X 是滤”，则：$Q(\Omega)$。）
（相似性）

给定论域 A，Q 是 $\wp(A)$ 上的一元谓词，
$\Omega=\bigcap\Gamma=\bigcap\{X\in\wp(A)|Q(X)\}$，若 $Q(\Omega)$ 成立，我们称 Q 具有$\cap$-保持性。

典型性质二

$(A, +, \cdot)$ 是格，$X_0 \in \wp(A)$，Q(X) 为 “$X_0 \subseteq X$ 且 X 是滤”，$\Omega = \bigcap \Gamma = \bigcap \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$，则：

- $\Omega = \{a \in A|$ 存在 $a_1, ..., a_n \in X_0, a_1 \cdot ... \cdot a_n \leq a\}$。

典型性质二

$(A,+,\cdot)$ 是格，$X_0 \in \wp(A)$，Q(X) 为“$X_0 \subseteq X$ 且 X 是滤”，$\Omega = \bigcap \Gamma = \bigcap \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$，则：

- $\Omega = \{a \in A|$ 存在 $a_1, ..., a_n \in X_0, a_1 \cdot ... \cdot a_n \leq a\}$。

分析一下：

典型性质二

$(A,+,\cdot)$ 是格，$X_0 \in \wp(A)$，Q(X) 为 “$X_0 \subseteq X$ 且 X 是滤”，
$\Omega = \bigcap \Gamma = \bigcap \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$，则：

- $\Omega = \{a \in A|$ 存在 $a_1, ..., a_n \in X_0, a_1 \cdot ... \cdot a_n \leq a\}$。

分析一下：任意 $a \in A$，

典型性质二

$(A,+,\cdot)$ 是格，$X_0 \in \wp(A)$，Q(X) 为 “$X_0 \subseteq X$ 且 X 是滤”，
$\Omega = \bigcap \Gamma = \bigcap \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$，则：

- $\Omega = \{a \in A|$ 存在 $a_1, \ldots, a_n \in X_0, a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \le a\}$。

分析一下：任意 $a \in A$，
$a \in$ 左边 $\iff a \in \bigcap \Gamma \iff \forall X \in \Gamma, a \in X$

典型性质二

$(A,+,\cdot)$ 是格，$X_0 \in \wp(A)$，Q(X) 为 “$X_0 \subseteq X$ 且 X 是滤”，
$\Omega = \bigcap \Gamma = \bigcap \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$，则：

- $\Omega = \{a \in A |$ 存在 $a_1, \dots, a_n \in X_0, a_1 \cdot \dots \cdot a_n \leq a\}$。

分析一下：任意 $a \in A$，

$a \in$ 左边 $\iff a \in \bigcap \Gamma \iff \forall X \in \Gamma, a \in X$

$a \in$ 右边 $\iff \exists a_1, \dots, a_n \in X_0,\ a_1 \cdot \dots \cdot a_n \leq a$

典型性质二

$(A, +, \cdot)$ 是格，$X_0 \in \wp(A)$，Q(X) 为“$X_0 \subseteq X$ 且 X 是滤”，
$\Omega = \bigcap \Gamma = \bigcap \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$，则：

- $\Omega = \{a \in A|$ 存在 $a_1, ..., a_n \in X_0, a_1 \cdot ... \cdot a_n \leq a\}$。

分析一下：任意 $a \in A$，
$a \in$ 左边 $\iff a \in \bigcap \Gamma \iff \forall X \in \Gamma, a \in X$
$a \in$ 右边 $\iff \exists a_1, ..., a_n \in X_0,\ a_1 \cdot ... \cdot a_n \leq a$
一个 $\forall$-型命题 等价于 一个 $\exists$-型命题

典型性质二

$(A,+,\cdot)$ 是格，$X_0 \in \wp(A)$，Q(X) 为 “$X_0 \subseteq X$ 且 X 是滤”，
$\Omega = \bigcap \Gamma = \bigcap \{X \in \wp(A) | Q(X)\}$，则：

- $\Omega = \{a \in A |$ 存在 $a_1, \ldots, a_n \in X_0, a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \leq a\}$。

分析一下：任意 $a \in A$，
$a \in$ 左边 $\iff a \in \bigcap \Gamma \iff \forall X \in \Gamma, a \in X$
$a \in$ 右边 $\iff \exists a_1, \ldots, a_n \in X_0,\ a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \leq a$
一个 $\forall$-型命题　等价于　一个 $\exists$-型命题

定义公式时是否有类似的结论成立？

典型性质二

公式的另一种定义方式：
通过有限次使用以下规则

- 得到命题变量
- 由 ϕ，得到 $\neg\phi$
- 由 ϕ 和 ψ，得到 $(\phi \to \psi)$

典型性质二

公式的另一种定义方式：
通过有限次使用以下规则

- 得到命题变量
- 由 ϕ，得到 $\neg\phi$
- 由 ϕ 和 ψ，得到 $(\phi \to \psi)$

构造出的所有符号串的集合，就是公式的集合。
或更精确地，
我们称一个有限符号串序列 $\phi_1, \ldots, \phi_n$ 为“构造序列”，若对每个 $i \leq n$，ϕ_i 满足以下条件之一：

典型性质二

公式的另一种定义方式：
通过有限次使用以下规则

- 得到命题变量
- 由 ϕ，得到 $\neg\phi$
- 由 ϕ 和 ψ，得到 $(\phi \rightarrow \psi)$

构造出的所有符号串的集合，就是公式的集合。
或更精确地，
我们称一个有限符号串序列 $\phi_1, ..., \phi_n$ 为“构造序列”，若对每个 $i \leq n$，ϕ_i 满足以下条件之一：

- ϕ_i 是命题变量
- 存在 $j < i$，$\phi_i = \neg\phi_j$
- 存在 $j, k < i$，$\phi_i = (\phi_j \rightarrow \phi_k)$

典型性质二

公式的另一种定义方式：
通过有限次使用以下规则

- 得到命题变量
- 由 ϕ，得到 $\neg\phi$
- 由 ϕ 和 ψ，得到 $(\phi \to \psi)$

构造出的所有符号串的集合，就是公式的集合。
或更精确地，
我们称一个有限符号串序列 $\phi_1, ..., \phi_n$ 为“构造序列”，若对每个 $i \leq n$，ϕ_i 满足以下条件之一：

- ϕ_i 是命题变量
- 存在 $j < i$，$\phi_i = \neg\phi_j$
- 存在 $j, k < i$，$\phi_i = (\phi_j \to \phi_k)$

$Form = \{\phi \in$ 符号串集 $| \exists$ 以 ϕ 结尾的构造序列 $\}$

典型性质二

定义一、$Form1 = \bigcap\{X \in \wp($ 符号串集 $)|$ 命题变量集 $\subseteq X$ 且 X 对 $\neg$ 、$\rightarrow$ 封闭 $\}$

典型性质二

定义一、$Form1 = \bigcap\{X \in \wp($ 符号串集 $)|$ 命题变量集 $\subseteq X$ 且 X 对 $\neg$ 、$\rightarrow$ 封闭 $\}$
定义二、$Form2 = \{\phi \in$ 符号串集 $|\exists$ 以 ϕ 结尾的构造序列 $\}$

典型性质二

定义一、$Form1 = \bigcap\{X \in \wp($ 符号串集 $)|$ 命题变量集 $\subseteq X$ 且 X 对 $\neg$ 、$\rightarrow$ 封闭 $\}$
定义二、$Form2 = \{\phi \in$ 符号串集 $|\exists$ 以 ϕ 结尾的构造序列 $\}$
可以证明，两种定义是等价的，即 $Form1 = Form2$。(《数理逻辑：证明及其限度》)

典型性质二

定义一、$Form1 = \bigcap\{X \in \wp($ 符号串集 $)|$ 命题变量集 $\subseteq X$ 且 X 对 $\neg$ 、$\rightarrow$ 封闭 $\}$
定义二、$Form2 = \{\phi \in$ 符号串集 $|\exists$ 以 ϕ 结尾的构造序列 $\}$
可以证明，两种定义是等价的，即 $Form1 = Form2$。(《数理逻辑：证明及其限度》)
$\bigcap\{X|Q(X)\} = \{a|\exists a_1 \ldots a_n, \ldots\}$

典型性质二

定义一、$Form1 = \bigcap\{X \in \wp($ 符号串集 $)|$ 命题变量集 $\subseteq X$ 且 X 对 $\neg$ 、$\rightarrow$ 封闭 $\}$
定义二、$Form2 = \{\phi \in$ 符号串集 $|\exists$ 以 ϕ 结尾的构造序列 $\}$
可以证明，两种定义是等价的，即 $Form1 = Form2$。（《数理逻辑：证明及其限度》）
$\bigcap\{X|Q(X)\} = \{a|\exists a_1 \ldots a_n, \ldots\}$
一个 $\forall$-型命题　等价于　一个 $\exists$-型命题

典型性质二

定义一、$Form1 = \bigcap\{X \in \wp($ 符号串集 $)|$ 命题变量集 $\subseteq X$ 且 X 对 $\neg$ 、$\rightarrow$ 封闭 $\}$
定义二、$Form2 = \{\phi \in$ 符号串集 $|\exists$ 以 ϕ 结尾的构造序列 $\}$
可以证明，两种定义是等价的，即 $Form1 = Form2$。（《数理逻辑：证明及其限度》）
$\bigcap\{X|Q(X)\} = \{a|\exists a_1 \ldots a_n, \ldots\}$
一个 $\forall$-型命题　等价于　一个 $\exists$-型命题

对于“内定理”或“推演”的定义，也有类似的结论成立。

小结

共性：都有某种“封闭性条件”，都成立“$\cap$-保持性”与“$\forall\exists$-等价性”。

小结

共性：都有某种“封闭性条件”，都成立“$\cap$-保持性”与“$\forall\exists$-等价性”。

问：什么样的条件可以胜任？

小结

共性：都有某种“封闭性条件”，都成立“$\cap$-保持性”与“$\forall\exists$-等价性”。

问：什么样的条件可以胜任？
滤的例子：
若 $a, b \in X$，则 $a \cdot b \in X$
若 $a \in X$ 且 $a \leq b$，则 $b \in X$
公式的例子：
若 $\phi \in X$，则 $\neg\phi \in X$
若 $\phi \in X$ 且 $\psi \in X$，则 $(\phi \to \psi) \in X$

小结

共性：都有某种“封闭性条件”，都成立“$\cap$-保持性”与“$\forall\exists$-等价性”。

问：什么样的条件可以胜任？
滤的例子：
若 $a, b \in X$，则 $a \cdot b \in X$
若 $a \in X$ 且 $a \leq b$，则 $b \in X$
公式的例子：
若 $\phi \in X$，则 $\neg\phi \in X$
若 $\phi \in X$ 且 $\psi \in X$，则 $(\phi \to \psi) \in X$
猜测（一般的“封闭性条件”）：
$\forall x_1, \ldots, x_n \in X, f(x_1, \ldots, x_n) \in X$
$\forall x_1, \ldots, x_n \in X, \forall y, (R(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow y \in X)$

小结

共性：都有某种“封闭性条件”，都成立“$\cap$-保持性”与“$\forall\exists$-等价性”。

问：什么样的条件可以胜任？
滤的例子：
若 $a, b \in X$，则 $a \cdot b \in X$
若 $a \in X$ 且 $a \leq b$，则 $b \in X$
公式的例子：
若 $\phi \in X$，则 $\neg\phi \in X$
若 $\phi \in X$ 且 $\psi \in X$，则 $(\phi \to \psi) \in X$
猜测（一般的“封闭性条件”）：
$\forall x_1, \ldots, x_n \in X, f(x_1, \ldots, x_n) \in X$
$\forall x_1, \ldots, x_n \in X, \forall y, (R(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow y \in X)$(更一般)
一般性的证明？